BILANGAN KOMPLEKS

Difinisi

Bilangan kompleks dinyatakan sebagai :

a + bi

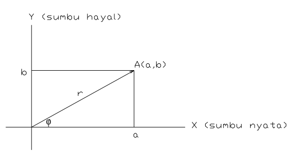
a, b bilangan nyata

i satuan bilangan hayal, $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

a + bi a disebut bagian nyata dan bi disebut bagian hayal.

Dua bilangan kompleks a + bi dan a – bi dimana yang berbeda tandanya disebut seasal (conjugate). Dua bilangan kompleks $a_1 + b_1 i$ dan $a_2 + b_2 i$ adalah sama bila $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$. Bilangan kompleks a + bi = 0 bila a = 0 dan b = 0

Representasi geometris



$$\bar{OA} = a + bi$$

$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

Bentuk trigoneometris

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\tfrac{b}{a}$$

r disebut modulus

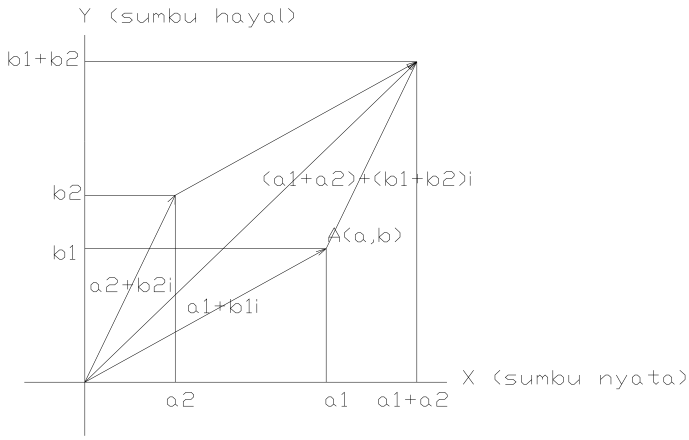
φ disebut argument

$r = |a + bi|$

Operasi dasar

Penambahan/ pengurangan

$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i$



Perkalian

$i^2 = -1$ $i^3 = -1.i = -i$ $i^4 = -1.-1 = 1$ $i^5 = 1.i = i$ dan seterusnya.
Secara umum untuk suatu integral k :
$i^{4k} = 1$ $i^{4k+1} = i$ $i^{4k+2} = -1$ $i^{4k+3} = -i$ $i^{4k+4} = 1$ $i^{4k+5} = i$
dan seterusnya.

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2)i = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i$
Dalam bentuk trigoneometri
$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
$= r_1 r_2[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2]$
$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)]$
$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
Untuk bilangan kompleks yang conjugate
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Pembagian

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}\frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2{}^2 + b_2{}^2}$$

Dalam bentuk trigoneometri

$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$. Untuk membuktikan kesamaan ini, perkalikan $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] =$
$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$.

Perhatiakan !
- Bahwa pada bilangan kompleks $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sebagai hasil perkalian dari dua bilangan kompleks; moduli $r = r_1 r_2$ dan amplitudo $\varphi = (\varphi 1 + \varphi_2)$, dimana $r_{1,} r_2$ dan φ_1, φ_2 adalah moduli dan amplitudo berurut dari masing-masing bilangan kompleks yang diperkalikan.

- Bahwa pada bilangan kompleks $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sebagai hasil pembagian dari dua bilangan kompleks; moduli $r = \frac{r_1}{r_2}$ dan amplitudo $\varphi = (\varphi 1 - \varphi_2)$, dimana $r_{1,} r_2$ dan φ_1, φ_2 adalah moduli dan amplitudo dari masing-masing bilangan kompleks yang menjadi pembilang dan penyebut.

- Operasi penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bialangan kompleks akan mengasilkan bilangan kompleks.
Atuan perkalian bilangan kompleks akan sama dengan aturan perkalian pada bilangan biasa.

- Pada penetapan jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi bilangan kompleks mudah dilihat bahwa apabila masing-masing bilangan kompleks ditukar dengan conjugatenya, maka hasil dari operasi yang disebutkan sebelumnya akan menghasilkan bilangan conjugate.

Pangkat dan akar
Ambil satu bilangan kompleks

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dipangkatkan dengan n dimana n adalah bilangan integer postif.

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . r(\cos\varphi + i\sin\varphi) .... r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ disebut theori DeMoivre.

$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$. Kalau sisi kanan dipangkatkan dengan n maka $\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Dalam hal ini

moduli $\rho^n = r$, $\rho = \sqrt[n]{r}$ dan amplitudo $n\phi = \varphi + 2k\pi$ atau $\phi = \frac{\varphi + 2k\varphi}{n}$

k adalah integer dan $\sqrt[n]{r}$ adalah real positif dari akar bilangan positif r

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

$$\cos 3\varphi = \cos^2\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\sin 3\varphi = -\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi$$

Contoh 1 : Harap dihitung semua harga $\sqrt[3]{1}$
Jawab : 1 = 1 + 0.i disini a = 1, b = 0, sehingga r = 1 dan $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

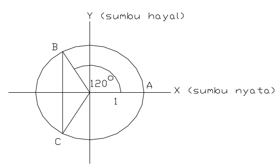
$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \sqrt[3]{1}(\cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3}) = \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3}$. Untuk k = 0, 1, 2, didapat tiga nilai :

$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ketiga hasil x1, x2, dan x3 tersebut secara geometri ditunjukkan sebagai titik-titik A, B, dan C dalam gambar berikut :



Penyelesaian persamaan binomial

Persamaan dalam bentuk $x^n = A$ disebut persamaan binomial.

Mari kita hitung akar-akarnya.

$x = \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)} = \sqrt[n]{A}(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n})$ ($k = 0, 1, 2,$ ....n-1)

Contoh 2 : Selesaikan persamaan $x^4 = 1$

Jawab : $x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \sqrt[4]{1} \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}$

Pilih k = 0, 1, 2, 3, 4 didapat

$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 = 1$

$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = 0 + 1.i = i$

$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1 + 0 = -1$

$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = 0 - 1.i = -i$

Fungsi exponential

$re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, dalam hal ini r adalah modulus dan θ adalah argument dalam satuan radian. Kita ulangi bahwa bilangan kompleks dapat digambarkandalam salah satu antara tiga : rectangular, polar atau exponential. Disini :

$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$

Contoh :

Nyatakan 2 + 2i dalam bentuk exponential2

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\tan\varphi = \frac{2}{2} = 1, \varphi = 45^o$

Bentuk polarnya adalah $2\sqrt{2}(\cos 45^o + i\sin 45^o)$

Untuk menulis dalam bentuk exponential $\varphi = 45^o$ dirubah dalam bentuk radial

$45^o = 45.\frac{\pi}{180} = 0{,}7854$ sehingga $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos 45^o + i\sin 45^o) = 2\sqrt{2}e^{0{,}7854i}$

Nyatakan 4e $^{0{,}6109i}$ dalam bentuk polar dan rectangular.

0,6109 = 180 $\frac{0{,}7854}{\pi} = 35^o$ sedang r = 4. Bentuk polarnya $4(\cos 35^o + i\sin^o 35)$.

$a = 4\cos 35^o = 4.0{,}8192 = 3{,}277$ dan $b = 4.\sin 35^o = 4.0{,}5736 = 2{,}294$. Sehingga bentuk rectangularnya adalah $3{,}277 + 2{,}294i$

Soal-soal

1. Diminta menghitung $\sqrt[3]{i}$ dan gambarkan

   Penyelesaian : $i = a + bi$ $\quad a = 0, b = 1$ $\quad r = a^2 + b^2 = 1$

   $\varphi = \arctan\frac{b}{a}\arctan\infty \qquad \varphi = 90^o = \frac{\pi}{2}$

   $\sqrt[3]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$

   $k = 0 \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\sqrt{3} + i}{2}$

   $k = 1 \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{450}{3} + i\sin\frac{450}{3} \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$

   $k = 2 \qquad \sqrt[3]{i} = \cos\frac{810}{3} + i\sin\frac{810}{3} \qquad \sqrt[3]{i} = -i$

2. Nyatakan $1 + i$ dalam bentuk polar dan exponentsial.

   Jawab : bentuk polar $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ $\qquad$ bentuk exponensial $\sqrt{2}e^{0{,}785i}$